

Keine Ahnung von Zahlen

Welche Sorten von

Zahlen

gibt es?

Datei Nr. 41002

Siehe auch Text 12202

Stand 15. August 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

**INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM**

www.mathe-cd.de

Wissen über Zahlen

Man hat die Zahlen je nach ihren Eigenschaften in Mengen zusammengefasst.

Die **natürlichen Zahlen** bilden die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Es sind die Zahlen, mit denen man zählen kann. Die Null gehört nicht dazu.

Sie gehört aber zur Menge $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Die **Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen** besteht aus den natürlichen Zahlen, deren negativen „Gegenzahlen“ $\mathbb{N}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$ und der Null.

Man kann diese Menge so schreiben: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Die negativen ganzen Zahlen benötigt man z. B., damit man die Gleichung $x + 8 = 3$ lösen kann. Als Lösung schreibt man dann $x = 3 - 8 = -5$ an

Die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ (auch Bruchzahlen genannt) sind alle Zahlen, die man durch eine Division von ganzen Zahlen erzeugen kann (wobei man nicht durch 0 dividieren kann).

Diese Zahlen können dann positiv oder negativ sein.

Beispiele für rationale Zahlen: $2 : 3 = \frac{2}{3}$, $5 : (-2) = -\frac{5}{2}$, $18 : 3 = \frac{18}{3} = 6$.

Man kann damit das Divisionsergebnis als Bruch schreiben. Die rationalen Zahlen haben eine Besonderheit: $20 : 8 = \frac{20}{8}$ und $10 : 4 = \frac{10}{4}$ sind verschiedene Brüche, aber sie haben den gleichen Wert. Man schreibt daher auch $\frac{20}{8} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$. das sind verschiedene Brüche.

Das Gleichheitszeichen bedeutet: Sie haben **den gleichen Wert!**

Und so kommt es, dass man auch jede ganze Zahl als Bruch schreiben kann:

$6 = \frac{6}{1} = \frac{12}{2} = \dots$. Diese Umrechnungen nennt man **Kürzen und Erweitern**.

Eine weitere Besonderheit ist die Möglichkeit der **Darstellung als Dezimalzahl**.

Man kann jede rationale Zahl als unendliche periodische Dezimalzahl schreiben:

$\frac{1}{3} = 0,33333\dots$ besser $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ oder $\frac{3}{4} = 0,75000000\dots$, besser $\frac{3}{4} = 0,75$.

Wenn die Periode aus Nullen besteht, bricht man vor der Periode ab.

Man kann beweisen: Jede periodische Dezimalzahl ist eine rationale Zahl, also eine

Bruchzahl. Beispiel: $1,5909090\dots$ also $1,59\overline{0}$ ist $\frac{35}{22}$.

Hinweis: periodische Dezimalzahlen werden im Text 10304 besprochen

Reelle Zahlen, die man nicht als Bruch schreiben kann nennt man **irrationale Zahlen**.

Man kann sie in der Dezimalschreibweise nur als unendliche nicht-periodische Dezimalzahl darstellen. Weil man aber irgendwo abbricht, ist dies aber nur eine Näherungszahl.

Die berühmteste irrationale Zahl π (Pi) mit dem Näherungswert: $\pi \approx 3,14159$.

Dann die Eulersche Zahl $e \approx 2,71828$ oder $\sqrt{2} \approx 1,41421356$.

Die Vereinigung aller rationalen und irrationalen Zahlen nennt man die **Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen**. Das sind im Grunde alle Zahlen, die man als periodische oder unendliche nicht-periodische Dezimalzahlen darstellen kann.

Als letztes will ich die **komplexen Zahlen** erwähnen. Diese werden in Schulen nur in Spezialkursen behandelt. Man hat sie erfunden, damit man auch Gleichungen dieser Art lösen kann: $x^2 + 1 = 0$ Normalerweise führt der Lösungsversuch auf $x^2 = -1$.

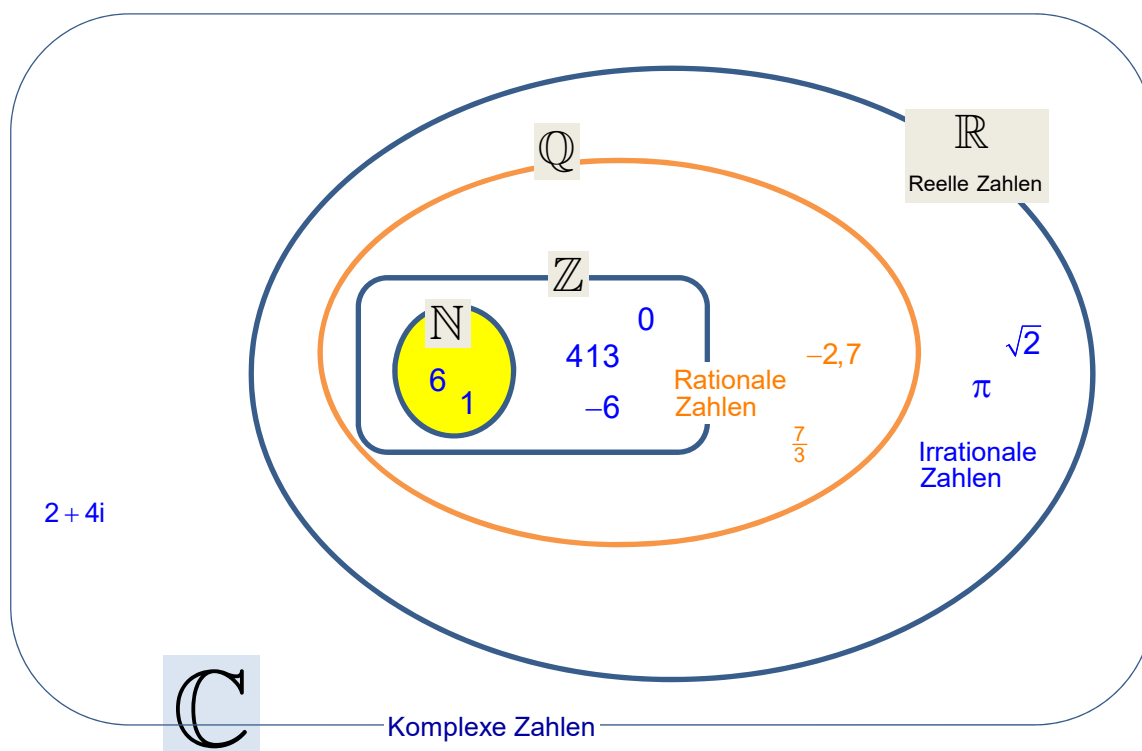
Wenn eine Lösung x gibt, dann kann diese aber keine reelle Zahl sein, denn deren Quadrat ist nie negativ. Manche schreiben dann konsequent weiter $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$.

Aber diese Zahl $\sqrt{-1}$ gibt es nicht.

Man kommt aber mit einem Trick weiter. Bezeichnet man die Zahlen, die Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$ ist mit i bzw. $-i$, dann hat man eine **imaginäre Lösung**, mit der man rechnen kann. Man kann sie mit Zahlen multiplizieren und auch reelle Zahlen dazu addieren. Dann erhält man sogenannte komplexe Zahlen, wie $x = 2 + 3i$.

Die **Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen** enthält die Menge der reellen Zahlen als Teilmenge, was sofort einleuchtet, wenn man z. B. die Zahl 16 so als komplexe Zahl schreibt: $x = 16 + 0 \cdot i$.

Übersicht über die Zahlenmengen:



Im folgenden Abschnitt gibt es Fragen zu diesen Zahlenmengen.

Man kann damit sein Wissen testen.

1 Gegeben sei die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 10\}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründe deine Angabe.

- A: 9,9 ist die größte Zahl in M.
- B: $\sqrt{2}$ gehört zu M.
- C: Es gibt unendlich viele Zahlen in M für die gilt: $3,1 < x < 3,2$.
- D: Jede Zahl aus M kann man als Bruch $x = \frac{z}{n}$ darstellen, wobei z und n natürliche Zahlen sind.
- E: Jede positive reelle Zahl, die kleiner als 10 ist, gehört zu M.

2 $\mathbb{Q}^+$ sei die Menge der positiven rationalen Zahlen.

Kreuze an, welche der folgenden Zahlen zu $\mathbb{Q}^+$ gehören.

$a = \sqrt{2}$ ☐	$b = \sqrt{0,04}$ ☐	$c = \frac{\pi}{2}$ ☐	$d = 2 \cdot 10^{-2}$ ☐
$e = 0,03 \cdot 10^3$ ☐	$f = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$ ☐	$g = \ln(e^2)$ ☐	$h = 9^{-\frac{1}{2}}$ ☐

3 Wahr oder falsch?

$5 \in \mathbb{Q}$ ☐	$\sqrt{121} \in \mathbb{Z}$ ☐	$\sqrt{-4} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ☐	$2,5 = \frac{23}{9}$ ☐
$\pi^2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ☐	$\frac{1}{\sqrt{8}} \in \mathbb{R}$ ☐	$\sqrt{8}^{1/3} = 2$ ☐	$\frac{a}{\sqrt{a}} \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$ ☐
$-\sqrt{49} \in \mathbb{Z}$ ☐	$\sqrt{-100} \in \mathbb{Q}$ ☐		

4 Wahr oder falsch?

(Hinweis: $A \subseteq B$ bedeutet: A ist Teilmenge von B.)

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$ ☐	$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ☐	$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q}$ ☐	$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$ ☐
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ ☐	$\mathbb{Q}^- \not\subset \mathbb{R}$ ☐		

Alle irrationalen Zahlen sind auch reelle Zahlen ☐

5

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

- A: Zwischen zwei rationalen Zahlen $a \neq b$ gibt es immer noch unendlich viele weitere rationale Zahlen.
- B: Das Produkt zweier rationaler Zahlen ist stets eine rationale Zahl.
- C: Der Quotient zweier negativer ganzer Zahlen ist stets eine positive ganze Zahl.
- D: $\sqrt{a}$ mit $a > 0$ ist stets irrational.
- E: Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist stets eine natürliche Zahl.
- F: Der Quotient zweier rationaler $^{\circ}$ Zahlen ist keine natürliche Zahl.
- G: $\sqrt{-9}$ liegt in $\mathbb{C}$
- H: Die Zahl $x = 0,\overline{9}$ ist eine natürliche Zahl
- I: $a = -\sqrt{3} \notin \mathbb{R}$
- J: $b = -\frac{1}{5} \notin \mathbb{N}$ aber $b \in \mathbb{Z}$
- K: Jede reelle Zahl ist eine komplexe Zahl.
- L: Jede rationale Zahl ist eine reelle Zahl.
- M: Jede Zahl $\sqrt{a}$ ist eine reelle Zahl.
- N: $\frac{1}{3}$ ist keine komplexe $^{\circ}$ Zahl
- O: $\frac{a}{b}$ mit $b > 0$ ist eine ganze Zahl, wenn $a = k \cdot b$ ist mit $k \in \mathbb{N}$.
- P: $\sqrt{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist irrational
- Q: Jede natürliche Zahl kann in der Form $\frac{a}{b}$ dargestellt werden mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$.
- R: Es gibt keine kleinste positive rationale Zahl.
- S: Es sei a eine ganze Zahl. Dann ist a^2 eine natürliche Zahl.
- T: Es sei a eine natürliche Zahl. Dann ist $a^{1/2}$ eine rationale Zahl.
- U: Jeder Bruch aus zwei ganzen Zahlen kann als periodische Dezimalzahl dargestellt werden.
- V: Jede rationale Dezimalzahl lässt sich als endliche Dezimalzahl darstellen.
- W: Es gibt Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen, die sich nicht als Bruch zweier natürlicher Zahlen darstellen lassen.
- X: Das Quadrat einer Wurzel aus einer positiven reellen Zahl ist eine rationale Zahl.

Die Lösungen:

1-L **Gegeben sei die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 10\}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründe deine Angabe.**

A: 9,9 ist die größte Zahl in M.

Falsch: Man kann weitere Stellen anfügen, dadurch wird die Zahl größer und bleibt dennoch in M. Z. B. $9,99 \in M$.

B: $\sqrt{2}$ gehört zu M.

Falsch: Man kann $\sqrt{2}$ nicht als Bruchzahl darstellen: $\sqrt{2} \notin M$.

C: Es gibt unendlich viele Zahlen in M für die gilt: $3,1 < x < 3,2$.

Wahr: Man kann an 3,1 fortgesetzt Einsen anhängen. Die neue Zahl wird größer und bleibt kleiner als 3,2. Oder man berechnet fortgesetzt die Mitte der letzten beiden Zahlen:

$$x_1 = \frac{3,1+3,2}{2} = 3,15 \Rightarrow x_2 = \frac{3,15+3,2}{2} = 3,175 \text{ usw.}$$

D: Jede Zahl aus M kann man als Bruch $x = \frac{z}{n}$ darstellen, wobei z und n natürliche Zahlen sind.

Wahr: Das ist ja gerade die Definition von rationalen Zahlen, dass man sie so darstellen kann. Selbst wenn sie als Dezimalzahl gegeben sind, kann man sie durch Umschreiben in einen Bruch so lange erweitern, bis im Zähler eine ganze Zahl steht.

$$x = \frac{x}{1} = \frac{2x}{2} = \dots$$

$$\text{Beispiel: } x = 2,35 = \frac{2,35}{1} = \dots = \frac{23,5}{10} = \frac{235}{100} \in \mathbb{Q}$$

E: Jede positive reelle Zahl, die kleiner als 10 ist, gehört zu M.

Falsch: „ $\sqrt{2}$ “ erfüllt die Bedingung $0 < x < 10$, ist aber irrational, denn sie lässt sich nicht als Bruch darstellen.

2-L **$\mathbb{Q}^+$ sei die Menge der positiven rationalen Zahlen.**Kreuze an, welche der folgenden Zahlen zu $\mathbb{Q}^+$ gehören.

$a = \sqrt{2}$ ☐

Man kann $\sqrt{2}$ nicht als Bruchzahl darstellen.

$b = \sqrt{0,04}$ ☒

$\sqrt{0,04} = 0,2 = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}^+$

$c = \frac{\pi}{2}$ ☐

 π ist irrational!

$d = 2 \cdot 10^{-2}$ ☒

$d = 0,02 = \frac{2}{100} \in \mathbb{Q}^+$

$e = 0,03 \cdot 10^3$ ☒

$e = 30 \in \mathbb{Q}^+$

$f = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$ ☒

$f = \frac{1}{\sqrt{3}^4} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9} \in \mathbb{Q}^+$

$g = \ln(e^2)$ ☒

$g = \ln(e^2) = 2 \in \mathbb{Q}^+$

$h = 9^{-\frac{1}{2}}$ ☒

$h = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}^+$

3-L**Wahr oder falsch?**

$5 \in \mathbb{Q}$ ☒

denn $5 = \frac{5}{1}$

$\sqrt{121} \in \mathbb{Z}$ ☒

denn $121 = 11^2$

$\sqrt{-4} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ☒

denn $\sqrt{-4}$ ist nicht reell aber komplex.

$2,5 = \frac{23}{9}$ ☒

denn $23 : 9$ ergibt eine periodische Dezimalzahl

$\pi^2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ☐

denn π ist keine Bruchzahl:

$\frac{1}{\sqrt{8}} \in \mathbb{R}$ ☒

$\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ ist reell.

$\sqrt{8}^{1/3} = 2$ ☐

denn $\sqrt{8}^{1/3} = \left((2^3)^{1/2}\right)^{1/3} = 2^{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$\frac{a}{\sqrt{a}} \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$ ☐

denn $\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ ist für unendlich viele Zahlen irrational.

$-\sqrt{49} \in \mathbb{Z}$ ☒

denn $-\sqrt{49} = -7 \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{-100} \in \mathbb{Q}$ ☐

denn bei negativem Radikanden ist die Lösung imaginär.

23	:	9	=	2,55...
18				
50				
45				
5				

4-L**Wahr oder falsch?**(Hinweis: $A \subseteq B$ bedeutet: A ist Teilmenge von B.)

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$

F

denn negative ganze Zahlen sind keine natürlichen Zahlen.

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

W

denn jede ganze Zahl kann man als Bruchzahl schreiben.

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q}$

Fdenn z. B. $\sqrt{2}$ ist reell aber nicht rational.

$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$

Fdenn z. B. $1+i$ ist komplex aber nicht reell.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$

W

denn jede natürliche Zahl kann man als Bruchzahl schreiben.

$\mathbb{Q}^- \subset \mathbb{R}$

F

denn negative Bruchzahlen ist auch reell.

Alle irrationalen Zahlen sind auch reelle Zahlen

W**5-L****Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?**

A: Zwischen zwei rationalen Zahlen $a \neq b$ gibt es immer noch unendlich viele weitere rationale Zahlen.

Wahr: Man kann z. B. diese Folge bilden:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}; \text{ mit } a < x_1 < b$$

$$x_2 = \frac{x_1+b}{2}; \text{ mit } x_1 < x_2 < b \Rightarrow a < x_2 < b$$

....

$$x_{n+1} = \frac{x_n + b}{2} \dots$$

B: Das Produkt zweier rationaler Zahlen ist stets eine rationale Zahl.

Wahr: Es sei $x_1 = \frac{a_1}{b_1} \in \mathbb{Q}$ und $x_2 = \frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} \in \mathbb{Q}$

C: Der Quotient zweier negativer ganzer Zahlen ist stets eine positive ganze Zahl.

Falsch: Beispiel: $x_1 = -4$ und $x_2 = -5 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}^+$

D: $\sqrt{a}$ mit $a > 0$ ist stets irrational.

Falsch: $\sqrt{2}$ ist zwar irrational, d.h. nicht als Bruch aus ganzen Zahlen darstellbar, aber $\sqrt{4} = 2$ ist rational, also nicht irrational.

E: Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist stets eine natürliche Zahl.

Falsch: $2 \in \mathbb{N}$ und $3 \in \mathbb{N}$, aber $2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$

F: Der Quotient zweier rationaler Zahlen ist keine natürliche Zahl.

Das ist in Einzelfällen richtig, etwa $x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{3} \notin \mathbb{N}$

kann aber in anderen Fällen falsch sein: $x_1 = \frac{8}{3}; x_2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{4} = 6 \in \mathbb{N}$.

Die globale Aussage ist daher falsch.

G: $\sqrt{-9}$ liegt in $\mathbb{C}$

Wahr $\sqrt{-9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = 3i \in \mathbb{C}$

H: Die Zahl $x = 0,\bar{9}$ ist eine natürliche Zahl

Wahr, denn es gilt: $0,\bar{9} = 1$

I: $a = -\sqrt{3} \notin \mathbb{R}$

Falsch, denn $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ und daher auch $-\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

J: $b = -\frac{1}{5} \notin \mathbb{N}$ aber $b \in \mathbb{Z}$

Falsch, denn $-\frac{1}{5}$ ist keine natürliche Zahl und keine ganze Zahl.

K: Jede reelle Zahl ist eine komplexe Zahl.

Wahr: Eine komplexe Zahl ist stets eine Summe (bzw. Differenz) aus einer reellen Zahl mit dem reellen Vielfachen der imaginären Zahl i :

$z = a + b \cdot i$ Ist $b = 0$, dann ist diese komplexe Zahl sogar reell.

L: Jede rationale Zahl ist eine reelle Zahl.

Wahr.

M: Jede Zahl $\sqrt{a}$ ist eine reelle Zahl.

Dies ist wahr, WENN $a \geq 0$. Im Falle $a < 0$ ist $\sqrt{a}$ aber eine komplexe Zahl.

Die Aussage ist allgemein daher falsch.

N: $\frac{1}{3}$ ist keine komplexe Zahl

Falsch, denn man kann sie in der Form $\frac{1}{3} + 0 \cdot i$ als komplexe Zahl darstellen.

O: $\frac{a}{b}$ mit $b > 0$ ist eine ganze Zahl, wenn $a = k \cdot b$ ist mit $k \in \mathbb{Z}$

Wahr: $\frac{a}{b} = \frac{k \cdot b}{b} = k \in \mathbb{Z}$, also wenn der Zähler ein ganzzahliges Vielfaches des Nenners ist.

P: $\sqrt{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist irrational

Falsch. zwar ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrational), aber $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$

Q: Jede natürliche Zahl kann in der Form $\frac{a}{b}$ dargestellt werden mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$.

Wahr: Man nennt das Erweitern: $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \dots$

R: Es gibt keine kleinste positive rationale Zahl.

Wahr: Angenommen man meint, dass 0,0001 die kleinste positive rationale Zahl ist, dann erhält man durch Einfügen einer 0 rechts von Komma eine kleinere Zahl. 0,00001. Das lässt sich endlos fortsetzen.

S: Es sei a eine ganze Zahl. Dann ist a^2 eine natürliche Zahl.

„Fast Wahr“: Die Aussage ist für alle positiven und negativen ganzen Zahlen wahr. Für 0 ist sie falsch, denn $0^2 = 0$ ist nicht natürlich.

T: Es sei a eine natürliche Zahl. Dann ist $a^{1/2}$ eine rationale Zahl.

Falsch!

U: Jeder Bruch aus zwei ganzen Zahlen kann als periodische Dezimalzahl dargestellt werden.

Wahr: Eine Division geht entweder auf, d. h. hat die Periode 0 $12 : 3 = 3,000000\dots$ oder wenn die Division nicht abbricht eine Periode der Länge größer 1: $4 : 3 = 1,333333$ bzw. $= 1,\overline{3}$

V: Jede rationale Zahl lässt sich als endliche Dezimalzahl darstellen.

Falsch: Viele Brüche ergeben bei der Division eine unendliche periodische Dezimalzahl

W: Es gibt Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen, die sich nicht als Bruch zweier natürlicher Zahlen darstellen lassen.

Wahr: Das berühmteste Beispiel ist $\sqrt{2}$, die man nicht als Bruch natürlicher Zahlen darstellen kann. Siehe Text 12202 Seite 10!

X: Das Quadrat einer Wurzel aus einer positiven reellen Zahl ist eine rationale Zahl.

Falsch: Zum Beispiel ist $\sqrt{\pi^2} = \pi$ ist keine rationale Zahl.